Практическое занятие №2.

Задачи для самостоятельной работы студента

Решение задач по темам: **Нахождение предела числовой последовательности.**

1) Доказать, что $\{x_n\}_{n\in N}$ является бесконечно малой последовательностью.

а) $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$; б) $x_n = \frac{2n}{n^3+1}$;

2) Доказать, что $\{x_n\}_{n\in N}$, является бесконечно большой последовательностью, если

$x_n = \lg(\lg n)$ $(n \geqslant 2)$

3) Найти следующие пределы

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-100n^2+1}{100n^2+15n}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10\,000n}{n^2+1}$.

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$. e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$.

4) Пользуясь теоремой о существовании предела монотонной и ограниченной последовательности, доказать сходимость

a) $x_n = \frac{1}{1^2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\dots+\frac{1}{n^2+1}$. b) $x_n = \left(1+\frac{1}{1^2+1}\right)\left(1+\frac{1}{2^2+1}\right)\dots\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)$.

ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

<u>Задачи из Лекции №2 (ФИТ)</u>

<u>Пример 1.</u> *Доказать, что* $x_n = (-1)^n n$ *является бесконечно большой.*

<u>Пример 2.</u> *Доказать, что* $x_n = \frac{1}{n!}$ *является бесконечно малой.*

<u>Пример 3.</u> *Рассмотрим последовательность* y_1, $=0{,}3$, y_2, $=0{,}33$, y_3, $=0{,}333$, …

<u>Пример 4.</u> *Пусть* $x_n = \frac{n}{n+1}$, $(n=1,2,\ldots)$. *Доказать, что* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

<u>Пример 5.</u> *Пользуясь теоремой о существовании предела монотонной и ограниченной последовательности, доказать сходимость* $x_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

<u>Пример6</u>. *Пользуясь теоремой о существовании предела монотонной и ограниченной последовательности, доказать сходимость* $x_n = \frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\ldots\frac{n+9}{2n-1}$.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Примеры:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{n-\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n-\sqrt{n})(n+\sqrt{n})}{n-\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}(n+\sqrt{n}) = +\infty;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot 3^n}{3^n-2} = \lim_{n\to\infty}\frac{5}{1-\frac{2}{3^n}} = 5\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{3^n}\right)} = 5. \blacktriangle$$

4. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$.

△ Отметим, что этот предел является неопределенностью типа $\infty-\infty$. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)+1}=\frac{1}{2}.\ ▲$$

5. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}\cos n}{n+1}$.

△ Последовательность $\{\cos n\}$ ограничена, а $\left\{\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}\right\}$ бесконечно малая, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}=0.$$

Отсюда следует, что их произведение является бесконечно малой последовательностью, то есть $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}\cos n}{n+1}=0$. ▲

Примеры: Найти пределы последовательностей:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-n+2}{5n^2+2}$;

◐ 1) Преобразуем выражение, стоящее под знаком предела, поделив числитель и знаменатель на старшую степень n, т.е. на n^2:

$$\frac{3n^2-n+2}{5n^2+2}=\frac{3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{5+\frac{2}{n^2}}.$$

Отсюда, используя теорему о действиях над пределами, получим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-n+2}{5n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{5+\frac{2}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\frac{2}{n^2}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}5+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}=\frac{3-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{5+2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=$$

$$=\frac{3-0+0}{5+0}=\frac{3}{5}.$$

В последних равенствах мы воспользовались тем, что предел константы — константа, а также тем, что последовательности $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ и $\left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}$ — бесконечно малые.

Окончательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-n+2}{5n^2+2}=\dfrac{3}{5}$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$;

Домножим и разделим выражение под знаком предела на сопряженное к нему, после чего воспользуемся формулой разности квадратов:

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=$$

$$=\frac{(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n-1})^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\frac{(n+1)-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}.$$

Поскольку последовательность $\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}$ — бесконечно большая, то последовательность $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$ — бесконечно малая. Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=0$, а значит, и $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})=0$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n}+1}$.

3) Поделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень n (выбираем из двух вариантов $\sqrt{n^3}$ и $\sqrt{n}$), т.е. на $\sqrt{n^3}=n^{3/2}$. Тогда

$$\frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n}+1}=\frac{1}{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}}+\frac{1}{\sqrt{n^3}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^3}}}=\frac{1}{\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n^3}}}.$$

Оба слагаемых в знаменателе последней дроби, т.е. $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{\sqrt{n^3}}$, — бесконечно малые последовательности, следовательно, вся эта дробь — бесконечно большая последовательность. Отсюда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n^3}}}=\infty.$$ ●

67. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$.

◀ Заметим, что

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$ ▶